

**Approche fractionnaire de Zener du comportement différé
de *Millettia Laurentii* (Wengue)**

NJANKOUO Jacques Michel¹, ATCHOUNGA Kuida Prisca², FOADIENG Emmanuel³,
TALLA Pierre Kisito²

¹University of Yaoundé I, Higher Technical Teacher Training College (HTTTC), Wood
Engineering Department, Ebolowa, Cameroon

²University of Dschang, Physics Department, Mechanics and Modeling of Physical Systems
Research Unit (*UR-2MSP*), Dschang, Cameroon

³University of Buéa, Higher Technical Teacher Training College (HTTTC), Civil Engineering
Department, Kumba, Cameroon ³

tpierrekisito@yahoo.com

Mots clés : Bois ; *Millettia Laurentii* ; Fluage ; Dérivées fractionnaires ; Spring-pot ; Modèle rhéologique fractionnaire.

Contexte et objectif

De nos jours l'une des principales difficultés auxquelles les structures en bois sont confrontées est le phénomène de fluage qui peut induire dans les structures bois de larges déformations et même provoquer la rupture. Le fluage est le phénomène au cours duquel la déformation du matériau augmente avec le temps sous l'effet d'une charge extérieure. Il induit un accroissement de la perte de contrainte dans la structure du bois et redistribue la force intérieure des structures statiques provoquant une déformation structurelle excessive, une réduction importante de force généralisée et même une perte des appuis de la structure (Hung et Wu 2018). Avec l'emploi croissant du matériau bois dans les ouvrages d'envergure de génie civil, le fluage du bois s'impose comme un des problèmes majeurs qui met à mal le développement des structures bois, la sécurité des constructions en bois ainsi que leur stabilité à long-terme (Hung et al 2019).

Pour maîtriser ce phénomène, il est indispensable de disposer d'un modèle qui prévoit de manière précise les déformations induites dans l'élément sollicité. Dans le cas particulier du matériau bois, la non-linéarité dans le comportement différé peut s'observer aussi bien aux faibles niveaux de charge qu'aux niveaux de charge élevés (Hunt 1999). Les modèles rhéologiques généralement proposés pour décrire le fluage du bois sont tributaires de nombreux paramètres dont la détermination n'est pas toujours aisée. Au contraire, le modèle fractionnaire basé sur l'algorithme de Levenberg-Marquard utilise peu de paramètres et se trouve être assez précis. La dérivée fractionnaire est un opérateur de différentiation temporel qui rend bien compte de l'évolution d'une fonction qui varie avec le temps (Zhuoping 2005). L'essence Wengé est l'une des plus anciens matériaux de construction utilisés dans le sud du Cameroun et mérite que l'on accorde une importance particulière dans la détermination de ses caractéristiques mécaniques.

Dans ce travail de recherche, notre but est d'étudier le comportement différé de l'essence de bois *Millettia Laurentii* plus connu sous le nom de Wengé à travers une approche basée sur le calcul fractionnaire. L'un des points forts des modèles fractionnaires par rapport aux modèles classiques étant qu'ils tiennent bien compte de l'effet mémoire du matériau étudié.

Matériels et méthodes

Le pot visqueux fractionnaire ou spring-pot

En utilisant l'opérateur de calcul fractionnaire, l'équation constitutive du spring-pot (Fig. 1b) est donnée par :

$$\sigma(t) = \eta^n D_t^n [\varepsilon(t)], \quad 0 \leq n \leq 1 \quad (1)$$



Fig. 1: (a) Pot visqueux Newtonien; (b) Spring-pot

où η^n est le coefficient de viscosité, n l'ordre de la dérivée fractionnaire, et D_t^n représente l'opérateur de différentiation fractionnaire.

$$D_t^n [\varepsilon(t)] = D D_t^{n-1} [\varepsilon(t)] \quad (2)$$

où D indique la dérivée première et l'opérateur D_t^{n-1} peut être exprimé comme l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, c'est-à-dire,

$$D_t^{n-1} [\varepsilon(t)] = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-n}}{\Gamma(1-n)} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (3)$$

où Γ est la fonction gamma. En supposant que la contrainte $\sigma(t)$ est constante ($\sigma(t) = \sigma$) dans l'équation (1) et en calculant l'intégrale fractionnaire Eq. (3) au sens de Riemann-Liouville, nous obtenons la relation constitutive du spring-pot :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\eta^n \times \Gamma(1+n)} t^n, \quad (0 \leq n \leq 1) \quad (4)$$

Etablissement du modèle rhéologique à dérivée fractionnaire

En remplaçant le pot visqueux de Newton dans le modèle classique de Zener par le spring-pot, nous obtenons un nouveau modèle rhéologique qui est constitué de l'association en série du corps Hookien et du corps viscoélastique (Fig. 2).

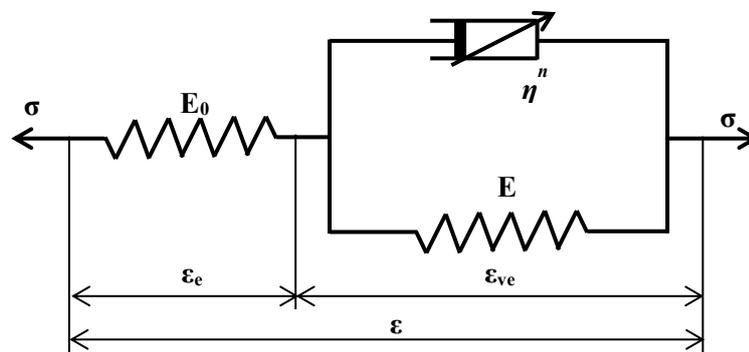


Fig. 2: Modèle rhéologique fractionnaire de Zener

De cette figure il vient que la déformation totale est donnée par :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} \quad (5)$$

où ε_e et ε_{ve} sont respectivement la déformation du corps Hookien et du corps viscoélastique. Pour le corps Hookien, la relation de constitution est donnée par :

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_0} \quad (6)$$

où E_0 est le module d'élasticité comme l'indique la Fig. 2. Pour le corps viscoélastique, la relation de constitution est donnée par :

$$\varepsilon_{ve} = \frac{\sigma}{\eta^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{E}{\eta^n}\right)^k t^{n(1+k)}}{n(1+k)\Gamma[n(1+k)]} \quad (7)$$

où E représente le module d'élasticité, et η^n est le coefficient de viscosité du spring-pot. En substituant les équations (6) and (7) dans l'équation (5), nous obtenons la déformation totale du modèle rhéologique à dérivée fractionnaire de Zener :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{E}{\eta^n}\right)^k t^{n(1+k)}}{n(1+k)\Gamma[n(1+k)]} \quad (8)$$

Montage expérimental

La Fig. 3 est un schéma de l'éprouvette sur laquelle deux jauges de déformation collées au milieu des faces opposées et connectées au pont d'extensométrie permettent la mesure des déformations au milieu des faces supérieure et inférieure de la poutre dont les dimensions étaient de 20mm×20mm×360mm. La Fig. 4 est une présentation simplifiée de la machine à essai de flexion quatre points, utilisée dans le cadre de ce travail.

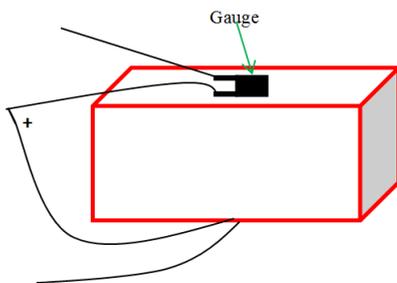


Fig. 3 : Eprouvette portant deux jauges

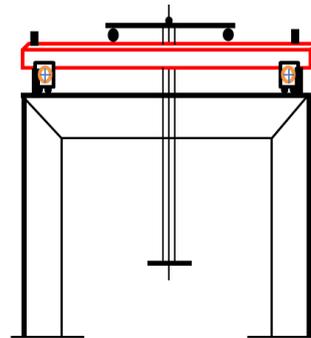


Fig. 4 : Machine d'essai de flexion

Résultats

Le Tab. 1 renseigne sur les caractéristiques mécaniques obtenus après application du modèle de Levenberg. De même, la Fig. 5 présente deux exemples de courbes théoriques du modèle de Zener et les courbes expérimentales. Pour chaque éprouvette, quatre niveaux de charge ont été considérés et le logiciel Matlab utilisé. On y observe une parfaite concordance.

Tab. 1 : Caractéristiques mécaniques optimisées du Wengué

σ (MPa)	E_0 (MPa)	E (MPa)	η^n (MPa.min ⁿ)	n
38,06	8 053	72 789	$1,034 \times 10^6$	0,335
43,03	8 331	68 594	$1,028 \times 10^6$	0,334

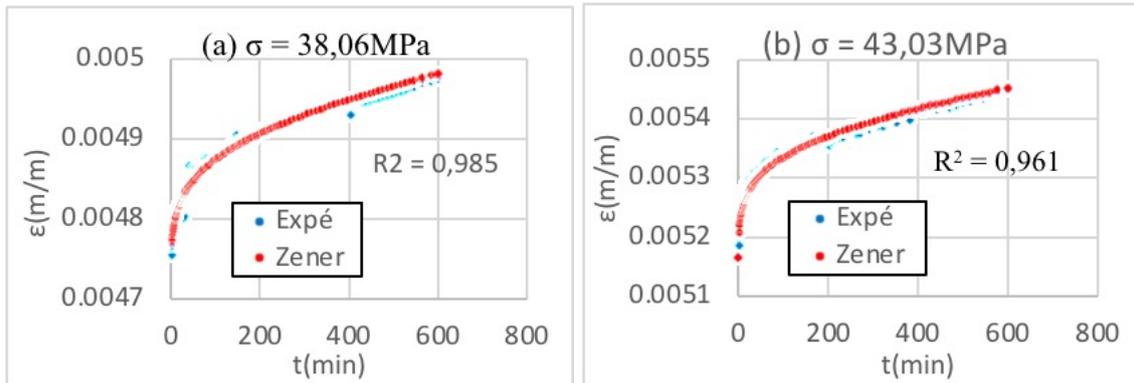


Fig. 5 : Courbes expérimentales et prévisionnelles du modèle pour (a) 38,06 MPa et (b) 43,03 MPa

Conclusion

Dans ce travail, nous avons fait recours à la théorie du calcul fractionnaire pour étudier le fluage non linéaire du bois Wengé. Le modèle fractionnaire proposé a été vérifié et validé à travers les essais de fluage sur le bois, lesquels essais ont également permis d'étudier l'influence des paramètres. La méthodologie de détermination des paramètres du modèle développé a également été détaillée. Le modèle ainsi proposé a été validé pour deux niveaux de contrainte. Les résultats ont révélé que ledit modèle peut décrire avec une bonne précision les deux premières phases du phénomène de fluage, et qu'il pourrait être utilisé comme une référence pour le fluage non linéaire du bois. Le degré d'influence des paramètres du modèle a été déterminé, à travers l'analyse de sensibilité des principaux paramètres du modèle de fluage du bois Wengé, singulièrement la contrainte σ et l'ordre fractionnaire n . Les résultats indiquent que la contrainte est corrélée positivement avec la déformation et le taux de fluage du bois Wengé tandis que l'ordre fractionnaire est corrélé plutôt négativement avec la déformation et le taux de fluage de ce matériau bois. La déformation et le taux de déformation vont croître avec l'augmentation de σ alors qu'ils auront plutôt une allure décroissante avec l'augmentation de n . En perspective, les niveaux de charge employés dans ce travail étaient inférieurs au tiers de la charge ultime de rupture du Wengé, nous poursuivrons dans les futurs travaux l'étude de son comportement non linéaire sous des niveaux de charge élevés pouvant conduire au fluage tertiaire. Nous modifierons le modèle proposé dans ce travail en y insérant un élément qui tienne compte de l'évolution du matériau vers sa rupture, question de parachever l'étude de son comportement différé.

Références

- Hung K.C., Wu J.H. (2018) Effect of SiO₂ content on the extended creep behavior of SiO₂-based wood-inorganic composites derived via the sol-gel process using the stepped isostress method. *Polymers*, 10, 409.
- Hung K.C., Tung, L.W., Wu J.H. (2019) Long-Term Creep Behavior Prediction of Sol-Gel Derived SiO₂- and TiO₂-Wood Composites Using the Stepped Isostress Method. *Polymers*, 11, 1215.
- Hunt D.G. (1999) A unified approach to creep of wood. *Proc R Soc Lond A* 455:4077–4095.
- Zhuoping S. (2005) The variable parameter rheological model of wood. *Wood Sci. Technol.* 39(1):19-26.