

Application du modèle fractionnaire de Zener à l'étude du comportement différé non linéaire du bois *Milletia Laurentii*

Njankouo Jacques Michel¹, Atchounga Kuida Prisca^{1,2}, Foadieng Emmanuël³ et Talla Pierre Kisito³

Université de Dschang, Unité de Recherche de Mécanique et de Modélisation des Systèmes Physiques (UR-2MSP), Dschang, Cameroun
 Université de Buéa, Ecole Normale Supérieure d'Enseignement Technique (ENSET),
 Département de Génie Civil et de Sciences du Bois, Kumba, Cameroun

tpierrekisito@yahoo.com

(2)
Objectif général: Déterminer les caractéristiques mécaniques de *Milletia Laurentii* par une approche aux dérivées d'ordre fractionnaires
Objectifs spécifiques
 - Modéliser le fluage du bois par l'approche de Zener;
 - Déterminer les paramètres du modèle;
 - Etudier la sensibilité du modèle par rapport aux paramètres,

1- Etablissement du modèle

- L'équation constitutive du spring-pot s'écrit



Figure 1 : (a) pot visqueux newtonnien ; (b) Spring-pot

$$\sigma(t) = \eta^n D_t^n [\varepsilon(t)], \quad 0 \leq n \leq 1 \quad (1)$$

où η^n est le coefficient de viscosité, n l'ordre de la dérivée fractionnaire, et D_t^n représente l'opérateur de différentiation fractionnaire. Equation qu'on peut encore écrire sous la forme

$$D_t^n [\varepsilon(t)] = DD_t^{n-1} [\varepsilon(t)] \quad (2)$$

- où D indique la dérivée première et l'opérateur D_t^{n-1} peut être exprimé comme l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, c'est à dire,

$$D_t^{n-1} [\varepsilon(t)] = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-n}}{\Gamma(1-n)} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (3)$$

En supposant que la contrainte $\sigma(t)$ est constante ($\sigma(t) = \sigma$) dans l'équation (1) et en calculant l'intégrale fractionnaire Eq. (3) au sens de Riemann-Liouville, nous obtenons la relation constitutive du spring-pot :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\eta^n \times \Gamma(1+n)} t^n, \quad (0 \leq n \leq 1) \quad (4)$$

Etablissement du modèle rhéologique à dérivée fractionnaire

Le pot visqueux de Newton dans le modèle classique de Zener est remplacé par le spring-pot, nous obtenons un nouveau modèle rhéologique qui est constitué de l'association en série du corps Hookien et du corps viscoélastique (Figure 2).

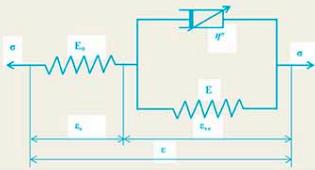


Figure 2 : Modèle rhéologique fractionnaire de Zener

Partionnant la déformation en sa partie élastique et sa partie plastique, on écrit

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} \quad (5)$$

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_0} \quad (6)$$

où E_0 est le module d'élasticité initial du matériau. La déformation du corps viscoélastique est donnée par la relation

Avec

$$\varepsilon_{ve} = \frac{\sigma}{\eta^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{E}{\eta^n}\right)^k t^{n(1+k)}}{\Gamma(n(1+k))} \quad (7)$$

En définitive, la déformation totale prend la forme

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{E}{\eta^n}\right)^k t^{n(1+k)}}{\Gamma(n(1+k))} \quad (8)$$

2- Dispositif expérimental

La figure 3 est un schéma des éprouvettes utilisées lors des essais, elle pour dimension 20mmx20mmx320mm, selon la norme française NF B 51_003, elle porte deux jauges collées sur deux faces symétriques et en leur milieu. Ces jauges sont reliées à pont d'extensométrie qui par simple lecture donne la déformation au milieu de l'éprouvette.

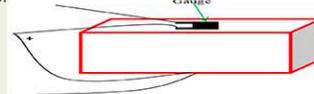


Figure 3: Eprouvette de dimensions 20mmx20mmx320mm portant des jauges

La figure 4 est une représentation de la machine d'essai de flexion quatre points

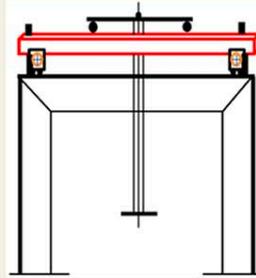


Figure 4: Dispositif de flexion quatre points

3- Résultats et discussions

3.1 Paramètres du modèle fractionnaire

Le paramètre E_0 est déterminé au début l'essai en utilisant la partie linéaire de la courbe de fluage.

Les paramètres E , η et n ont été déterminés à partir de l'algorithme de Levenberg-Marquardt; qui est une méthode d'optimisation dont la direction de descente est une combinaison des directions des algorithmes du Gradient et de Newton-Gauss. Le principal avantage de cette méthode d'optimisation est que les paramètres optimisés du modèle sont d'une haute précision.

3.2 Vérification du modèle non linéaire de fluage du *Milletia Laurentii*

Une série d'essais de fluage en flexion sous différentes contraintes ont été réalisés. La contrainte a été maintenue à 24,62 % CMR (environ 38,06 MPa) et à 27,83 % CMR (environ 43,03 MPa). Le module d'Young moyen du bois de Wengé était de 21058 MPa et la densité moyenne 789 kg/m³.

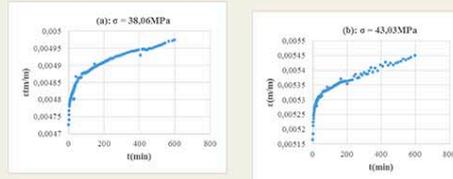


Figure 5: Courbes expérimentales du Wengé pour les contraintes égales à 38,06 MPa et 43,03 MPa

Les points expérimentaux des courbes précédentes et l'algorithme de Levenberg-Marquardt, les paramètres mécaniques du Wengé sont déterminés et consignés dans le tableau. On observe sur ces courbes l'absence du fluage tertiaire.

Tableau 1: Paramètres optimisés du Wengé

σ (MPa)	E_0 (MPa)	E (MPa)	η^n (MPa.min ⁿ)	n
38,06	8053,32	72789	1,034x10 ⁶	0,335
43,03	8331,07	68594	1,028x10 ⁶	0,334

Comparaison des courbes théoriques et expérimentales

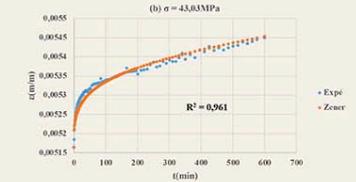
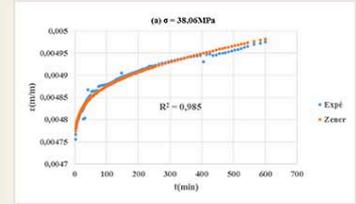


Figure 6 : Courbes théoriques et expérimentales du Wengé

Ces courbes montrent une parfaite concordance entre les courbes théoriques et les courbes expérimentales, ce qui atteste de la validité du modèle.

4. Influences des paramètres sur le fluage du Wengé

4.1 Influence du niveau de contrainte σ

Les paramètres $E_0 = 8405,28$ MPa ; $E = 65352$ MPa ; $\eta^n = 1,153 \times 10^6$ MPa.minⁿ et $n = 0,363$ sont introduits dans l'équation (8). Les différentes valeurs de la contrainte sont les suivantes : 32,7MPa ; 32,9MPa ; 33,1MPa ; 33,3MPa et 33,5MPa. La figure 9 ci-dessous présente les courbes de fluage sous différents niveaux de contrainte.

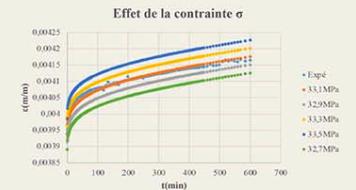


Figure 7 : Effet de la contrainte sur le fluage

La déformation du bois Wengé est sérieusement affectée par le niveau de contrainte, et la déformation augmentera au fur et à mesure que la contrainte va augmenter. Cependant, la contrainte n'a aucun effet significatif sur le taux de fluage. Plus la contrainte est élevée, plus la déformation élastique instantanée l'est aussi, et moins le temps requis pour intégrer le fluage stationnaire à vitesse constante est court. Cette observation est en accord avec les travaux de Njankouo et al. [30] et Zhou et al. [31] sur l'influence de la contrainte sur le phénomène de fluage.

4.2 Influence de l'ordre fractionnaire n

Pour étudier l'influence de l'ordre fractionnaire, la méthode de contrôle de la variable est utilisée question de s'assurer que les autres paramètres demeurent fixes. L'ordre fractionnaire est incrémenté progressivement de 0,357 à 0,369 par pas de 0,003 et une série de courbes de fluage avec différents ordres est obtenue, comme la figure 10 l'indique.

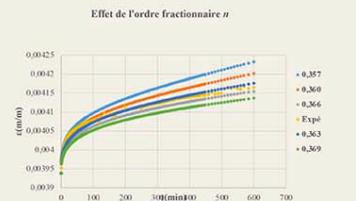


Figure 8 : Effet de l'ordre fractionnaire sur le fluage

A partir de la figure 8, nous remarquons que l'augmentation de l'ordre fractionnaire augmente la durée des fluages primaire et secondaire. La déformation du bois Wengé diminue au fur et à mesure que l'ordre fractionnaire est incrémenté. En plus, le taux de fluage est influencé par l'ordre fractionnaire ; c'est-à-dire, plus l'ordre fractionnaire est grand, moins le taux de fluage est petit à chaque niveau. Cette observation est la principale découverte dans ce travail expérimental, car elle est opposée aux résultats de Zhou et al. [31] concernant l'effet de l'ordre fractionnaire. En effet, Zhou et al. [31] était plutôt parvenu à la conclusion selon laquelle l'augmentation de l'ordre fractionnaire s'accompagnait d'une croissance de la déformation dans le matériau.