

Techniques expérimentales :  
Corrélation d'images numériques

François HILD et Stéphane ROUX

26 septembre 2011

## Table des matières

<b>Chapitre 1. Corrélation d'images numériques</b> . . . . .	1
François HILD, Stéphane ROUX	
1.1. INTRODUCTION . . . . .	1
1.2. LA CORRÉLATION D'IMAGES NUMÉRIQUES (CIN) . . . . .	2
1.2.1. Approche locale . . . . .	3
1.2.2. Approche globale . . . . .	6
1.2.2.1. Résidus de corrélation. . . . .	6
1.2.2.2. Approche intégrée. . . . .	7
1.3. ETUDE DE CAS : ANALYSE D'UNE EPROUVETTE FISSURÉE . . . . .	8
1.4. CHAMPS DE DEPLACEMENTS TRIDIMENSIONNELS . . . . .	11
1.4.1. Mesures en surface . . . . .	11
1.4.1.1. Stéréovision. . . . .	11
1.4.1.2. Analyse d'images obtenues par AFM. . . . .	12
1.4.2. Mesures en volume . . . . .	14
1.4.2.1. Approches locales. . . . .	14
1.4.2.2. Approches globales. . . . .	14
1.5. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES . . . . .	17
1.6. Bibliographie . . . . .	19

## Chapitre 1

# Corrélation d'images numériques

### 1.1. INTRODUCTION

Le développement de techniques fiables de mesures de champs est primordial si l'on veut caractériser les effets (hétérogènes) mécaniques à une échelle fine. En effet des solides, homogènes sous sollicitations complexes, ou hétérogènes, font apparaître des champs dont l'analyse multi-échelles est indispensable en relation avec leur (micro)structure et / ou le type de chargement imposé. Ces développements s'inscrivent dans la dialectique essai / calcul en modélisation des matériaux et des structures dans laquelle les mesures de champs jouent un rôle d'interface. À partir de la connaissance de ces champs, on peut, par exemple, identifier des paramètres mécaniques globaux [AVR08, GRE10] et locaux [CLA02], voire valider des modèles de comportement et des outils numériques [RAN09].

Différentes techniques peuvent être utilisées pour mesurer des champs de déplacements ou de déformations [GRE11]. Lorsqu'elles font appel à des bases de l'optique et qu'elles sont couplées à une analyse mécanique, on parle souvent de photomécanique [BER95, LAG00, RAS00]. La photoélasticité est la plus ancienne [MES30, JES49] et encore très pratiquée dans le monde industriel. Citons également des méthodes utilisant un laser : l'interférométrie holographique [SMI94], l'interférométrie de speckle [JON89] et la granularité laser [BER91, RAS00]. De manière générale ces techniques sont très précises mais nécessitent des précautions importantes quand elles sont utilisées dans un laboratoire de mécanique. On peut également utiliser la lumière blanche. A côté des techniques de moiré [WEL48, POS65]

---

Chapitre rédigé par François HILD et Stéphane ROUX.

ou des caustiques [MAN66], existent les mesures par corrélation d'images numériques [BUR82, SUT83, CHU85] dont le principe est assez proche de la vélocimétrie par imagerie de particules [BAR77, DUD77, GRO77, ADR05] utilisée en mécanique des fluides. D'utilisation extrêmement simple, cette technique tend à se généraliser dans les laboratoires de mécanique des solides. C'est cette dernière qui sera présentée dans cet article.

Dans la partie 1.2, les principes généraux de la corrélation d'images sont introduits. Deux approches, l'une locale et l'autre globale sont ainsi présentées. Un exemple de pilotage d'essai mécanique illustre une manière (non standard) d'utiliser la corrélation d'images. Une étude d'un cas d'éprouvette fissurée est traitée dans la partie 1.3. Différentes bases cinématiques sont considérées. Enfin, quelques extensions à des cas de mesures de déplacements tridimensionnels en surface et en volume sont décrites dans la partie 1.4.

## 1.2. LA CORRÉLATION D'IMAGES NUMÉRIQUES (CIN)

La corrélation d'images consiste à déterminer un champ de déplacement à partir de l'analyse d'images numériques (*i.e.*, un ensemble de pixels dont on connaît le niveau de gris). Ces images sont représentées par des fonctions (de la position  $\mathbf{x}$  et du vecteur déplacement inconnu  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ )  $g(\mathbf{x})$  qui sont des perturbations d'une image dans la configuration déformée  $g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}))$  par rapport à une image dans la configuration de référence  $f(\mathbf{x})$

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) + b(\mathbf{x}), \quad (1.1)$$

où  $b(\mathbf{x})$  est un signal aléatoire (*e.g.* bruits de photon, de numérisation, d'obscurité dans le cas d'images obtenues avec un capteur CCD [HOL98]). Lorsque  $b(\mathbf{x}) = 0$ , l'équation (1.1) traduit la conservation locale du niveau de gris. La détermination de  $\mathbf{u}$  est un problème *mal posé* tant qu'on ne fait pas d'hypothèses supplémentaires quant à la régularité du champ recherché pour que l'information à disposition (*i.e.*, les images) soit suffisante à sa mesure. Soit la fonctionnelle  $E$  d'un champ de déplacement test  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$

$$E[\mathbf{u}] = \|\mathbf{f}(\bullet) - g(\bullet + \mathbf{u})\|_{\Omega}^2, \quad (1.2)$$

où " $\bullet$ " correspond à une variable muette. Les formulations qui en découlent sont en général basées sur la conservation globale du niveau de gris. Lorsque l'on choisit la norme quadratique habituelle  $\|\mathbf{f}\|_{\Omega}^2 = \int_{\Omega} |\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$ , on aboutit à la méthode de minimisation de la différence quadratique utilisée en mécanique des fluides [GUI00] dans le cas d'un champ localement constant. Il s'agit de minimiser la fonctionnelle  $E_2$

$$E_2[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}))]^2 d\mathbf{x}. \quad (1.3)$$

Cette fonctionnelle atteint sa valeur minimale, 0, pour la bonne cinématique et lorsque  $b = 0$  [cf. équation (1.1)].

### 1.2.1. Approche locale

Lorsque l'on suppose que  $\mathbf{u}$  est une translation de corps rigide, la minimisation de (1.3) peut être résolue par des techniques d'intercorrélation qui consistent à maximiser les superpositions de  $g$  translaté et  $f$  [SUT83]. En effet, la minimisation précédente est *équivalente* (dans la limite de grands domaines  $\Omega$ ) à maximiser la quantité  $h(\mathbf{u})$

$$h(\mathbf{u}) = (f \star g)(\mathbf{u}) \equiv \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x} + \mathbf{u})d\mathbf{x}, \quad (1.4)$$

où  $\star$  est l'opérateur d'intercorrélation. Le déplacement qui maximise le produit d'intercorrélation correspond à une évaluation du déplacement moyen inconnu. Le calcul d'un produit d'intercorrélation peut être conduit dans l'espace de référence [RAS00, SUT09] ou dans l'espace de Fourier [BER96, HIL02]. Un champ de déplacement est alors constitué de l'ensemble des déplacements moyens des zones d'étude considérées.

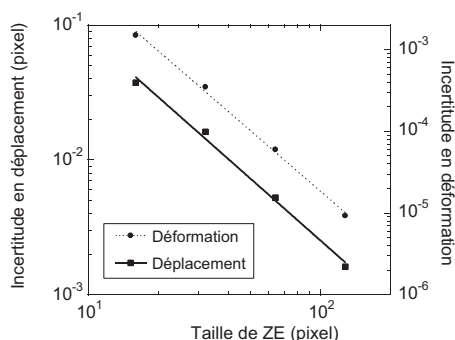
A titre d'illustration, ce type de procédure a été utilisée pour piloter un essai par corrélation d'images. Un essai de traction sur un acier ordinaire est contrôlé en niveau de déformation, non pas à l'aide d'un extensomètre ou d'une jauge, mais par l'utilisation d'images [FAY07, FAY08]. Une tôle de dimension  $157 \times 50 \times 2 \text{ mm}^3$  est mouchetée pour présenter une texture aléatoire. Dans le cas présent,  $3 \times 3$  zones d'étude de taille 64 pixels sont choisies. Ceci correspond à un compromis entre niveau d'incertitude et résolution spatiale qu'il s'agit de déterminer.

Les incertitudes en déformation sont évaluées de la manière suivante. On considère une image de référence de la région d'étude de l'éprouvette dont on souhaite contrôler les déformations longitudinales. Cette image est décalée artificiellement par transformée de Fourier à l'aide de la propriété de décalage / modulation [HIL99] par incréments de 0.1 pixel dans chaque direction. Pour chaque valeur de déplacement, l'écart quadratique moyen est évalué et correspond à l'incertitude. Celle-ci est évaluée pour chaque valeur imposée entre 0 et 1 pixel. La valeur moyenne est ensuite calculée et est appelée incertitude en déplacement  $\sigma_u$ . Cette dernière est estimée pour différentes tailles  $\ell$  de zones d'étude. Pour chaque décalage imposé, le champ de déformation est obtenu par différences finies centrées. Les incertitudes sont alors calculées de la même manière que pour les déplacements. La valeur moyenne,  $\sigma_\epsilon$  est appelée incertitude en déformation. Afin d'avoir des mesures de déplacement indépendantes, le décalage  $\delta$  entre zones d'études consécutives est pris égal à leur taille  $\ell$ .

La première étape est appliquée à l'image considérée. La figure 1.1 montre l'évolution de l'incertitude en déplacement  $\sigma_u$  en fonction de  $\ell$ . Pour des tailles supérieures à 16 pixels, une loi de puissance décrit très raisonnablement cette évolution

$$\sigma_u = \frac{A^{\alpha+1}}{\ell^\alpha} \quad (1.5)$$

avec  $A = 1.4$  pixel (et  $\alpha = 1.5$ ). On montre ainsi que plus la résolution spatiale ( $\ell$ ) est importante, plus l'incertitude ( $\sigma_u$ ) est faible. On aboutit ainsi au compromis annoncé entre incertitude et résolution spatiale. Ainsi, augmenter la résolution spatiale revient également à augmenter le temps de calcul pour estimer un déplacement. Le choix s'est porté sur une taille  $\ell$  égale à 64 pixels qui conduit à une incertitude en déplacement  $\sigma_u$  de  $5 \times 10^{-3}$  pixel.



**Figure 1.1.** Incertitudes en déplacement et en déformation en fonction de la taille des zones d'étude  $\ell$ . Les symboles pleins sont des résultats de corrélation. Les droites en trait continu correspondent à une interpolation en loi de puissance  $(-1.5)$  et en traits pointillés à une loi avec un exposant  $-2.5$ .

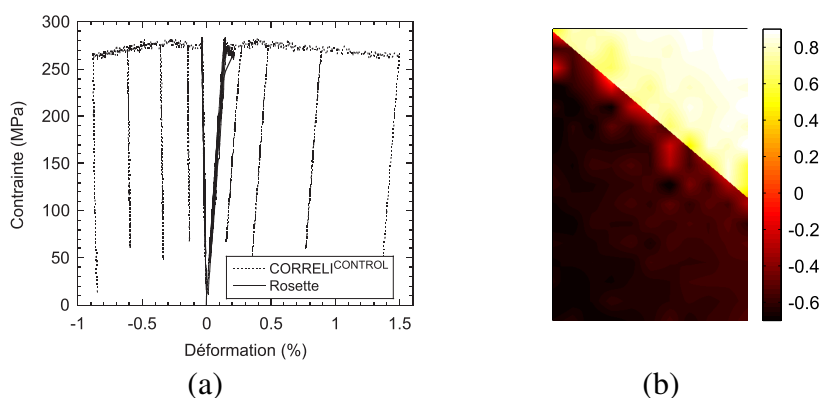
L'incertitude en termes de déformation est ensuite évaluée. Dans le cas présent un algorithme de différences finies centrées est utilisé de telle manière que la résolution spatiale en déformation est égale à  $2\delta$ . Lorsque  $\delta \geq \ell$ , l'incertitude en déformation est liée à celle en déplacement par

$$\sigma_\epsilon = B \frac{\sigma_u}{2\delta} \quad (1.6)$$

avec  $B = \sqrt{2}$ . En identifiant à partir des données de la figure 1.1, on obtient  $B \approx 1.5$  en accord avec la valeur attendue. Ce résultat montre que l'incertitude en déformation dépend des deux paramètres de corrélation, explicitement de  $\delta$  et implicitement de  $\ell$  par l'intermédiaire de  $\sigma_u$  [cf. équation (1.5)]. L'équation (1.6) est retrouvée dans le cas présent, en particulier un exposant de  $-2.5$  pour la dépendance en taille  $\ell$  de par le fait que  $\delta = \ell$ .

Pour le pilotage, on choisira un décalage entre zone d'étude grand  $\delta = 400$  pixels de telle manière que l'incertitude en déformation soit de l'ordre de  $10^{-5}$ . Cette valeur estimée *a priori* a été validée *a posteriori* [FAY07]. A partir des déplacements des 9 centres de zones d'étude, on détermine la déformation moyenne longitudinale, paramètre de contrôle. La figure 1.2a montre la courbe contrainte / déformations obtenue à

partir des mesures avec une rosette et par corrélation d'images, une fois la correction de déplacement hors-plan effectuée [FAY08]. Très tôt dans l'essai, le signal de jauge n'est plus cohérent (si l'essai avait été piloté à l'aide de ce capteur, il aurait conduit à une rupture prématurée de l'échantillon). Ceci est dû à un décollement de jauge induit par un phénomène de plasticité localisée [FAY07, RET07b], cf. figure 1.2b.



**Figure 1.2.** *Contrainte en fonction des déformations longitudinale et transverse obtenues par jauge et corrélation d'images avec environ  $2 \times 1000$  points de contrôle (a). Composante tangentielle du champ de déplacement (exprimé en pixels avec  $1 \text{ pixel} \equiv 86 \mu\text{m}$ ) montrant une localisation de la déformation (b). Une approche globale enrichie [RET07b] a été utilisée pour mieux révéler ce champ.*

De par le temps de calcul encore assez long et le temps nécessaire au stockage des images, la fréquence de travail est de l'ordre du Hertz. Il a ainsi été nécessaire d'implémenter un asservissement à deux boucles en cascade (une boucle interne (rapide) contrôlant le déplacement et une boucle externe à pilotage en déformation [FAY07]). Ainsi, seuls des essais quasi statiques ont été réalisés jusqu'à présent. On peut néanmoins prévoir que dans un avenir très proche une accélération des cadences de par l'utilisation de cartes DSP voire de GPU qui permettent des calculs sur toute l'image en quelques dizaines de millisecondes [LEC09].

On notera que l'hypothèse cinématique faite jusqu'à présent (*i.e.*, déplacement constant par zone d'étude) peut être relaxée. Les codes de corrélation académiques et commerciaux utilisent actuellement des interpolations locales du déplacement de degré 1 voire plus élevé [BOR09]. Cependant, seule la valeur moyenne du déplacement est conservée et affectée au centre de la zone d'étude. Cela permet de capter des cinématiques plus complexes, et conduit à des incertitudes de mesure dont l'amplitude

dépend, entre autres, de la texture observée et de son interpolation, mais également du degré d'interpolation cinématique locale, et de la taille de la zone d'étude.

### 1.2.2. Approche globale

Dans cette partie, deux approches sont présentées. La première consiste à ne minimiser que les résidus de corrélation de manière globale [SIM99, WAG02]. La seconde consiste à régulariser la mesure par la recherche d'un champ de déplacement qui satisfasse (au mieux) non seulement à la conservation des niveaux de gris mais également aux équations de la mécanique [RET09].

#### 1.2.2.1. Résidus de corrélation.

L'espace des vecteurs déplacements tests  $E_K$  est introduit et vérifie l'hypothèse de régularité (par exemple en utilisant des filtres passe-bas ou des descriptions par éléments finis). Supposons que  $f$  et  $g$  soient suffisamment régulières aux petites échelles, et que le déplacement  $\mathbf{u}$  soit petit en amplitude pour que l'on puisse faire un développement de Taylor au premier ordre de  $f$ . La fonctionnelle à minimiser devient

$$R_{cor}[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x}. \quad (1.7)$$

A l'instar de la méthode de Rayleigh-Ritz, le champ de déplacement test peut être écrit comme une combinaison linéaire dans une base de l'espace  $E_K$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_i u_i \Psi_i(\mathbf{x})$ , telle que  $R_{cor}[\mathbf{u}]$  soit une forme quadratique en amplitudes  $u_i$  inconnues. La condition d'extrémalité nécessite que pour tout  $i$  l'on ait

$$\left[ \int_{\Omega} (\nabla f \cdot \Psi_i)(\mathbf{x})(\nabla f \cdot \Psi_k)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] u_k = \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})](\nabla f \cdot \Psi_i)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.8)$$

Ce système (*linéaire*) peut être écrit sous forme matricielle

$$M_{ik} u_k = a_i. \quad (1.9)$$

La condition de régularité, qui peut paraître contraignante, permet néanmoins de traiter des cas de textures qui ne sont pas différentiables [WAG02]; la régularité de  $\mathbf{u}$  permet de s'affranchir, d'une certaine manière, de celle *a priori* nécessaire de  $f$  par intégration par parties et filtrage. De plus, le champ de déplacement est généralement déterminé de manière itérative. Ainsi, seul l'incrément de déplacement  $\delta\mathbf{u}$  doit être d'amplitude petite de telle manière qu'il minimise

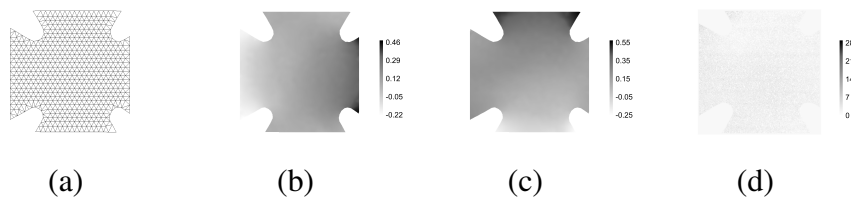
$$R_{cor}[\delta\mathbf{u}] = \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})) - \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x} \quad (1.10)$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}$  désigne l'évaluation du déplacement à l'itération précédente. En utilisant des approches multi-échelles [HIL02, BES06, RET07b], les composantes du déplacement



de faible longueur d'onde sont introduites progressivement ce qui permet d'améliorer encore ce point.

A ce niveau de généralité, différents espaces peuvent être choisis. C'est tout l'intérêt de la formulation présentées ici. Par exemple, on peut considérer l'espace de Fourier [ROU02, WAG02] afin, par exemple, de pouvoir capter des fluctuations de champs cinématiques. Une alternative couramment utilisée en mécanique est de discrétiser le champ de déplacement comme, par exemple, dans la méthode des éléments finis. Le choix le plus simple consiste à utiliser des interpolations bilinéaires données par des éléments quadrangulaires à 4 nœuds (on parlera de CIN-Q4 [BES06]). Comme cela sera montré plus bas, on peut également enrichir la cinématique (à l'instar de la méthode des éléments finis étendus [BLA99, MOE99]) avec des éléments Q4 pour pouvoir mesurer des déplacements discontinus (cela correspond à de la CIN-XQ4 [RET07b, RET08a] ou CINÉ [RET07a]). Des éléments triangulaires peuvent également être utilisés formant ainsi un maillage structuré ou non [LEC09]. La figure 1.3 illustre le résultat d'un calcul de corrélation avec des triangles T3 pour mailler une éprouvette cruciforme en composite (fibre de verre / matrice vinylester) sollicitée de manière biaxiale. A convergence, le résidu moyen est de 3.19 % de la dynamique des images et le champ correspondant est uniforme (figure 1.3c).



**Figure 1.3.** Maillage de corrélation (a). Champs de déplacement (exprimé en pixel) dans les directions horizontale (b) et verticale (c) mesuré par CIN-T3 [LEC09]. Résidus de corrélation en niveaux de gris (d). Les images analysées sont codées sur 256 niveaux de gris.

#### 1.2.2.2. Approche intégrée.

Lorsque l'on impose *a priori* une admissibilité mécanique aux champs mesurés on parle d'approche *intégrée* ou CINI [HIL06a]. Dans le cadre précédent, on peut directement imposer des solutions analytiques lorsque l'on traite un essai brésilien [HIL06b] ou même un matériau fissuré [ROU06]. Dans ce qui suit, on propose de régulariser le calcul de corrélation par un calcul aux éléments finis [LEC09, RET09]. Afin d'imposer une admissibilité mécanique au sens des éléments finis, on introduit un résidu

mécanique. L'énergie de déformation  $E_{def}$  s'écrit dans un format matrice-vecteur

$$2E_{def} = \{\mathbf{u}\}^T [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} \quad (1.11)$$

où  $[\mathbf{K}]$  est la matrice de raideur associée à la discrétisation choisie et  $\{\mathbf{u}\}$  contient les valeurs des inconnues cinématiques. A des fins d'identification, la minimisation de l'écart à l'équilibre [CLA02, CLA04] peut être réécrite sous la forme de la norme des forces internes. Ainsi,  $R_{mec}$  s'écrit

$$R_{mec} = \{\mathbf{u}\}^T [\bar{\mathbf{K}}]^T [\bar{\mathbf{K}}] \{\mathbf{u}\} \quad (1.12)$$

où  $[\bar{\mathbf{K}}]$  est la partie rectangulaire de  $[\mathbf{K}]$  concernant les nœuds intérieurs pour lesquels les forces correspondantes sont supposées nulles.

Afin de résoudre la minimisation *couplée* des résidus de corrélation  $R_{cor}$  et mécaniques ( $R_{mec}$ ), une somme pondérée est introduite pour aboutir à un résidu total  $R_{tot}$

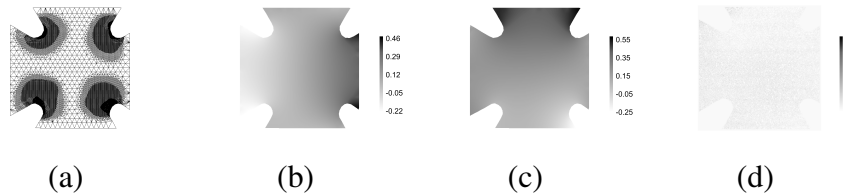
$$R_{tot} = (1 - \lambda) R_{mec} + \lambda R_{cor} \quad (1.13)$$

où  $\lambda$  est un paramètre de couplage appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$ . En pratique,  $R_{mec}$  et  $R_{cor}$  sont normés par leurs valeurs lorsque  $\lambda$  est égal à 1, notées  $R_{mec}^0$  et  $R_{cor}^0$  ( $R_{tot}^0 = R_{cor}^0$ ) *i.e.*, pour un champ de déplacement obtenu par une approche de corrélation standard, par exemple CIN-Q4.

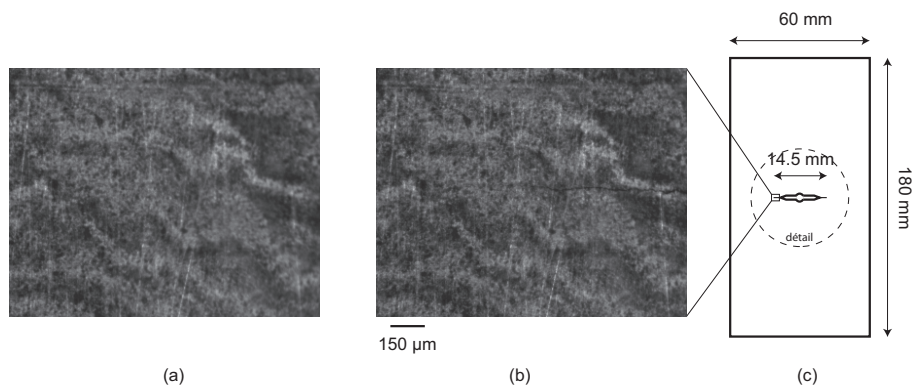
La figure 1.4 illustre le résultat d'un calcul de corrélation intégrée avec des triangles T3 (CINI-T3) pour lequel la valeur du coefficient de Poisson a été laissée libre (elle faisait partie des inconnues du problème de minimisation). Cet exemple traite des mêmes images que celles correspondant au résultat de CIN-T3 (figure 1.3). On notera que dans les zones de concentration de déformation le maillage a pu être raffiné jusqu'à 2.5 pixels grâce à la régularisation mécanique. Dans le cas contraire, le calcul n'aboutit pas de par le fait que l'incertitude de mesure devient trop importante. A convergence, le résidu moyen est de 3.22 % de la dynamique des images (valeur très proche du résultat CIN-T3 avec un maillage plus grossier) et le champ correspondant est uniforme (figure 1.4c). Enfin, on obtient une valeur du coefficient de Poisson de 0.31.

### 1.3. ETUDE DE CAS : ANALYSE D'UNE EPROUVETTE FISSUREE

Les différentes procédures globales introduites précédemment sont illustrées sur un exemple 2D d'une éprouvette CCT (figure 1.5a) soumise à de la traction cyclée avec un rapport de charge  $R = 0.4$ . Le matériau étudié est un acier XC48 [HAM07]. Dans l'analyse qui suit, seul le niveau maximum d'effort est considéré après avoir appliqué 300 kcycles de telle manière que la taille de fissure  $2a = 14.5$  mm. Les images ont été prises à l'aide d'un microscope longue distance et une caméra CCD



**Figure 1.4.** Maillage de corrélation (a). Champs de déplacement (exprimé en pixel) dans les directions horizontale (b) et verticale (c) mesuré par CINI-T3 [LEC09]. Résidus de corrélation en niveaux de gris (d). Les images analysées sont codées sur 256 niveaux de gris.

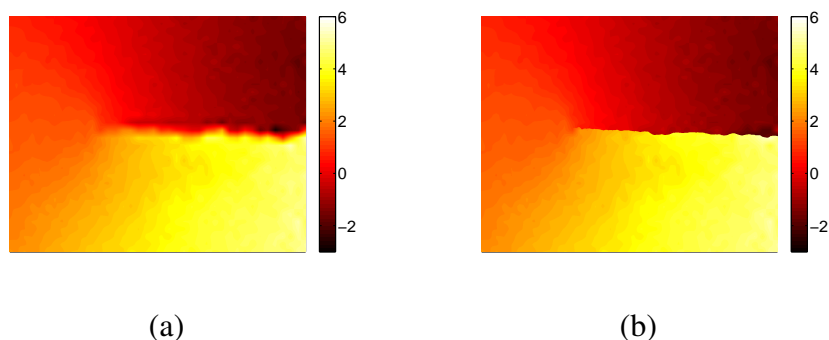


**Figure 1.5.** Image de référence (a). Image avec une fissure ouverte (b). Géométrie CCT (c).

de telle sorte que la taille physique du pixel soit de  $2.08 \mu\text{m}$ . A ce grandissement la surface brute est observée et aucune préparation n'a été nécessaire (figure 1.5b,c).

De par la présence de la fissure, les déplacements sont discontinus et ne sont pas bien captés avec une cinématique continue (par exemple CIN-Q4). L'introduction d'un enrichissement discontinu le long d'une ligne droite permet d'obtenir une meilleure description. Cependant, la figure 1.7 montre que la fissure n'est pas droite. On peut ainsi ajuster la géométrie de la fissure en se servant des résidus de corrélation [RET08a]. Les déplacements dans la direction verticale sont donnés pour une

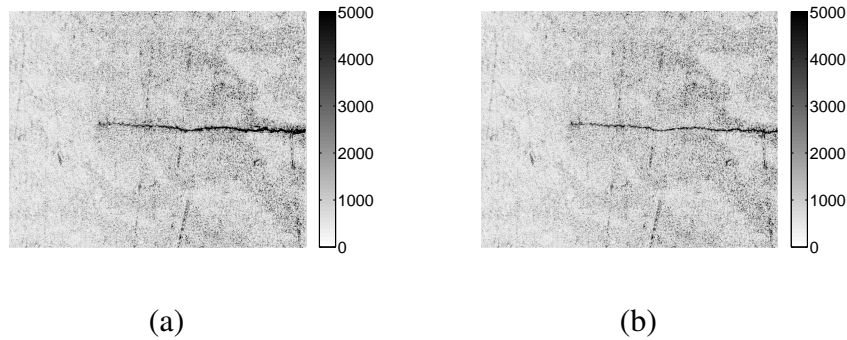
CIN-Q4 avec des éléments de 32 pixels. On remarque que la discontinuité touche toute la largeur des éléments traversés par la discontinuité. A contrario, l'enrichissement permet une meilleure description du champ de déplacement, notamment le long de la surface de discontinuité (figure 1.6).



**Figure 1.6.** Champs de déplacement en pixels ( $1 \text{ pixel} = 2.08 \mu\text{m}$ ) dans la direction verticale : (a) interpolation Q4 avec des éléments de 32 pixels, (b) interpolation Q4 enrichie avec détection de la surface fissurée.

La figure 1.7 montre les résidus de corrélation avec les deux méthodes utilisées. La première carte correspond à une discrétisation Q4 continue. On observe une large zone où l'erreur est importante. Ceci est causé par l'erreur de description cinématique. Dans le second cas, l'erreur se réduit essentiellement à la surface fissurée elle-même. Dans le premier cas, le résidu moyen est de 932 niveaux de gris, alors qu'il diminue pour atteindre 911 niveaux de gris dans le second cas. On notera que les niveaux de résidu ont été limités à 5000 afin de rendre la figure plus lisible. La dynamique des images analysées est de 65536 niveaux de gris. Ceci montre que les calculs de corrélation se sont bien déroulés pour les deux bases cinématiques choisies.

A partir de ces résultats, on peut identifier les facteurs d'intensité des contraintes (FICs). Plusieurs approches sont possibles. La première consiste à post-traiter les champs de déplacements mesurés en utilisant des solutions analytiques [McN87]. Cette technique a aussi été utilisée pour contrôler un essai, non pas en déformation moyenne comme illustré ci-dessus, mais en histoire de facteur d'intensité des contraintes [FAY08]. La seconde consiste à utiliser, à l'instar des calculs par éléments



**Figure 1.7.** Résidus de corrélation en niveaux de gris : (a) interpolation  $Q4$  avec des éléments de 32 pixels, (b) interpolation  $Q4$  enrichie avec détection de la surface fissurée. La dynamique des images est de 16 bits (figure 1.5b,c).

finis [PAR74], SUO92], les intégrales d'interaction [RET05, RET08c]. Enfin, une dernière consiste à exhiber l'extracteur optimal au sens de sa moindre sensibilité aux incertitudes de mesures [ROU09]. Dans le cas particulier analysé ici, des valeurs de FIC en mode I égale à  $20.7 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  et  $< 0.1 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  en mode II ont été obtenues avec les trois techniques.

#### 1.4. CHAMPS DE DEPLACEMENTS TRIDIMENSIONNELS

Dans les paragraphes qui suivent, trois cas sont discutés pour conduire des mesures tridimensionnelles de champs de déplacement. Les deux premiers concernent des mesures surfaciques, et le troisième concerne des mesures volumiques.

##### 1.4.1. Mesures en surface

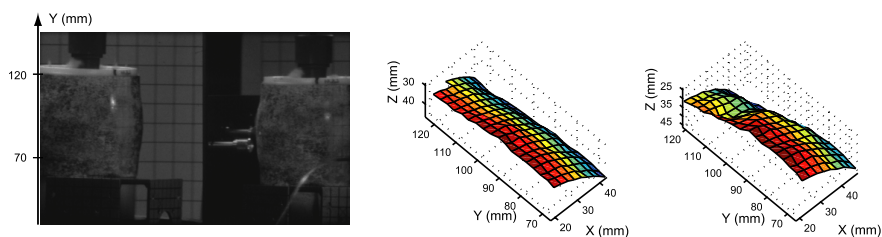
###### 1.4.1.1. Stéréovision.

La stéréocorrélation [CLE01, ORT02, SUT09] consiste à reconstruire une surface 3D. En observant l'objet d'au moins deux points de vue différents, on peut déterminer les coordonnées tridimensionnelles recherchées. On utilise alors un banc stéréoscopique (comprenant deux ou plusieurs caméras) étalonné et un algorithme de corrélation d'images permettant l'appariement spatial et temporel.

Cette technique est très utilisée lors d'essais mécaniques [ORT07] où la monovision n'est pas suffisante (au cause, par exemple, de déplacements hors plan [BES10]),

pour l'étude de la mise en forme des tôles [BRU01, GAR02], l'analyse du comportement de structures aéronautiques [CHA05], voire pour des applications plus insolites [COU04, MOR10]. A côté des applications sous sollicitations quasi statiques, on peut également utiliser ce type de moyen pour l'analyse d'essais dynamiques nécessitant des procédures d'étalonnage particulières [BES07, BES10].

L'exemple qui suit illustre une expérimentation en détonique dans laquelle un cylindre en cuivre est soumis à une expansion rapide générée par un explosif. Les différents points de vue sont donnés par des miroirs de renvoi car l'observation se fait avec une caméra à miroir tournant et à film analogique qui, de par sa technologie, ne peut pas être synchronisée avec une autre. Les images obtenues ainsi que la reconstruction pour un temps médian sont montrées sur la figure 1.8. Sur cette dernière, une perforation apparaît sur la partie la plus sollicitée de l'échantillon traduisant l'émergence du phénomène de striction. Une observation de l'éprouvette avec une seconde



**Figure 1.8.** *Reconstruction de la géométrie du cylindre marqué par un motif aléatoire à un instant intermédiaire. Comparaison avec la forme reconstruite à un instant antérieur.*

caméra confirme la présence de formes similaires dans la même zone. Ceci montre que même dans des conditions extrêmes (*e.g.* phénomènes très brefs, éclairage par flashes pyrotechniques), on peut utiliser la corrélation d'images afin de mener des analyses quantitatives concernant l'évolution de la forme d'objets tridimensionnels (figure 1.8), les champs de déplacements tridimensionnels et les déformations « planes ».

#### 1.4.1.2. Analyse d'images obtenues par AFM.

La plupart des applications en corrélation fait appel à des images optiques. On peut néanmoins noter que l'utilisation d'un microscope électronique à balayage (MEB) est possible. Ceci nécessite souvent une préparation particulière des échantillons [ALL94, BRE03] et surtout requiert une attention particulière aux procédures d'obtention des images ainsi qu'aux dérives inhérentes au MEB [SUT07a, SUT07b].

Le microscope à force atomique est encore plus délicat à utiliser, non seulement en tant que moyen imageur, mais également en tant que moyen de mesure [XU08]. Parmi les applications utilisant la corrélation d'images, la plupart utilisent des films de silicium polycristallin [CHA02, CHO05a, CHO05b, CHO07a, CHO07b]. Très peu d'études traitent de la mesure de facteurs d'intensité des contraintes à ces très petites échelles. Le résultat le plus remarquable est obtenu indirectement à l'aide d'un calcul par éléments finis [CHO07b].

Le cas étudié consiste à imager une petite partie de la surface d'une éprouvette dite DCDC (*double cleavage drilled compression*) en silice. L'expérience est conduite en atmosphère à température et hygrométrie contrôlées dans laquelle on observe de la fissuration sous-critique. L'image de phase ne fournit que l'information sur le lieu de la fissure. Dans la suite, seul un couple d'images de topographie est analysé. Celles-ci sont très bruitées et nécessitent l'utilisation d'une version intégrée de la corrélation d'images. Elle devra être adaptée au fait que la conservation (1.1) de la luminance (ici la topographie !) ne sera plus satisfaite. En effet, elle est généralisée comme suit

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{u}}_p(\mathbf{x})) + \tilde{u}_z(\mathbf{x}), \quad (1.14)$$

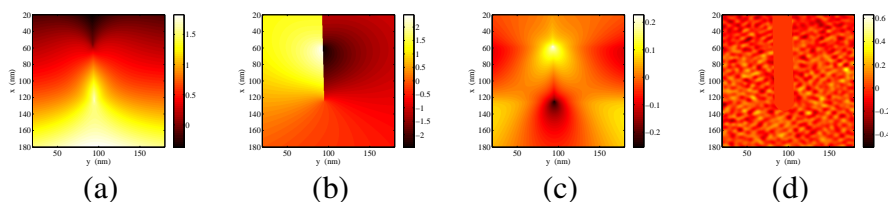
où  $\tilde{\mathbf{u}}_p$  désigne le déplacement dans le plan, et  $\tilde{u}_z$  la composante hors plan. Ces deux quantités ne dépendent que des coordonnées dans le plan  $\mathbf{x}$ . Dans le cas présent, l'image de référence contient déjà une fissure. On accède ainsi à une variation de déplacement ( $\tilde{\mathbf{u}}$ ) prenant en compte la fermeture de la fissure à la position initiale et une ouverture de la fissure à la position finale. La fonctionnelle à minimiser s'écrit alors

$$R_{cor}[\tilde{\mathbf{u}}_p, \tilde{u}_z] = \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{u}}_p(\mathbf{x})) - \tilde{u}_z(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x}. \quad (1.15)$$

Dans le cas présent, on considère 6 mouvements de corps rigide (3 translations et 3 rotations), deux champs plans (solution de [WES39]) et un champ de déplacement hors plan (beaucoup moins classique). Si l'on suppose que le facteur d'intensité des contraintes évolue peu durant l'essai, il ne reste que 8 inconnues (degrés de liberté généralisés). Afin de corriger les artefacts liés à l'utilisation d'un AFM, il a été nécessaire de rajouter 3 degrés de liberté correspondant à un champ de déformation plane uniforme. Le champ le plus intéressant dans cette étude concerne le déplacement hors plan  $u_h$  qui s'écrit

$$u_z(r, \theta) = \sqrt{r} [\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\theta/2) + \alpha_2 \cos(\theta)] \quad (1.16)$$

où les paramètres  $\alpha_{0,1,2}$  sont déterminés comme minimisant les résidus de corrélation sur la série d'images analysées. On notera que la forme proposée est en très bon accord avec les simulations par éléments finis de [FET09]. Pour les champs de déplacement montrés en figure 1.9, la taille physique du pixel est de 0.4 nm. La forme des résidus de corrélation (figure 1.9d) permet d'avoir une bonne confiance dans les résultats montrés. De cette analyse, il sort directement la valeur du FIC en mode I qui est de l'ordre de  $0.4 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ , en très bon accord avec la valeur imposée au cours de l'essai.



**Figure 1.9.** Champs de déplacement tridimensionnel :  $u_x$  (a),  $u_y$  (b), et  $u_z$  (c) mesurés par corrélation d'images de topographie (les échelles sont en nanomètres). Résidu de corrélation (d).

### 1.4.2. Mesures en volume

L'extension à des images volumiques, obtenues par exemple par tomographie des rayons X [BAY99], par microscopie confocale [FRA07] ou par résonance magnétique nucléaire [BEN09] est possible en utilisant les mêmes formalismes que ceux présentés dans la partie 1.2.

#### 1.4.2.1. Approches locales.

Les premières applications de la corrélation d'images volumiques (CIV) sont apparues dans le domaine de la biomécanique [BAY99, SMI02, VER04, LIU07]. Les applications en mécanique des (géo)matériaux [BOR04, LEN07, FOR08] ont ensuite suivi. De manière générale, les mêmes algorithmes que ceux utilisés pour des images bidimensionnelles ont été utilisés. On peut néanmoins noter que le fait que les images de tomographie soient obtenues par reconstruction induit un certain nombre d'artefacts qui peuvent être pénalisants en termes de performance [BOR04].

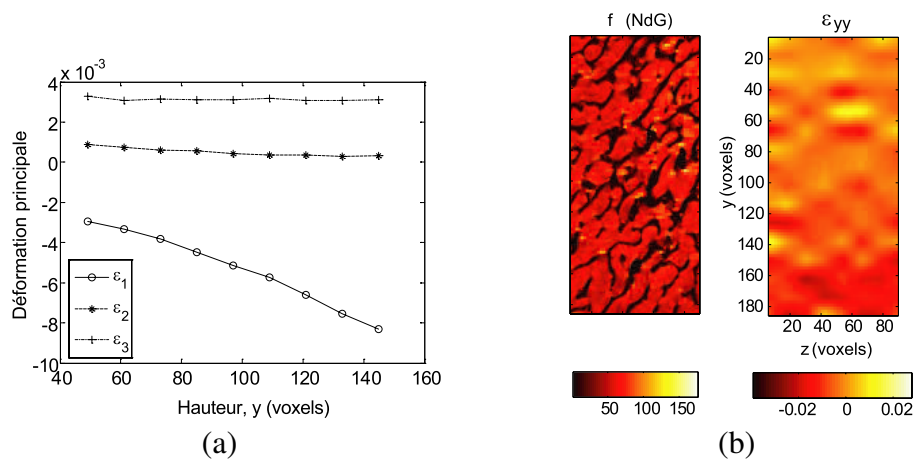
#### 1.4.2.2. Approches globales.

Lorsque qu'on utilise une discrétisation à base d'éléments cubiques à 8 nœuds et une interpolation trilinéaire on parle de CIV-C8 [ROU08], de CIV-XC8 [RET08b, RAN09, HIL10] lorsque cette dernière est à nouveau enrichie au sens des éléments finis étendus, et de CIV-T4 lorsque des éléments tétraédriques sont considérés. Seules les versions CIV-C8 et CIV-T4 sont utilisées ici.

**Analyse d'un essai de compression sur de l'os spongieux.** Un essai de compression *in situ* sur une éprouvette d'os spongieux bovin a été imagé (figure 1.10) par résonance magnétique nucléaire à l'échelle microscopique, ou  $\mu$ IRM [BEN09]. La taille physique du voxel est de  $78 \mu\text{m}$ . Les champs volumiques de déplacement ont ainsi pu être mesurés. A partir de cette information, la déformation moyenne a été évaluée pour un cube de taille  $96^3$  voxels. Celui-ci est déplacé (virtuellement) le

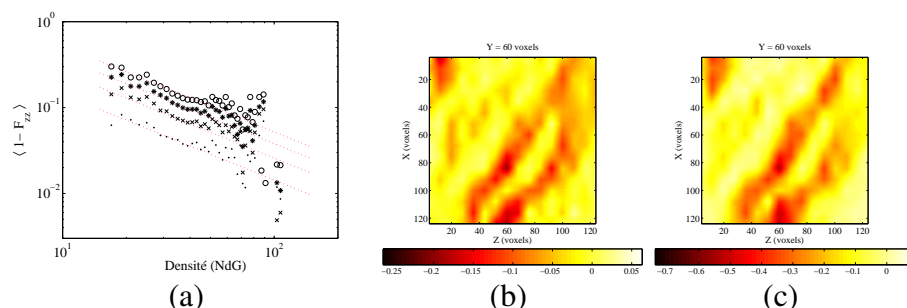


long de l'axe de sollicitation et les déformations principales moyennes sont mesurées pour différentes positions. La figure 1.10 montre l'évolution de ces trois grandeurs en fonction de la position considérée. On observe une forte dépendance à cette dernière suggérant que l'essai n'est pas homogène. Dans ce cas particulier, un dépouillement à l'aide de ces quantités ne permet pas d'évaluer de manière fiable les propriétés élastiques du matériau testé. Ceci est confirmé par la carte de déformation correspondant à une coupe sagittale.



**Figure 1.10.** Analyse d'un essai de compression sur os spongieux bovin. Evolutions des déformations principales moyennes en fonction de la position verticale du volume d'analyse dans l'échantillon (a). Coupes sagittales de la microstructure et du champ de déformation longitudinale (b).

**Analyse d'un essai de compression sur laine de roche.** Un essai de compression *in situ* sur une éprouvette de laine minérale a été imagé avec un tomographe de laboratoire [HIL09]. La taille physique du voxel est de  $254 \mu\text{m}$ . Les champs volumiques de déplacement ont ainsi pu être mesurés pour quatre niveaux de déplacement différents. A partir de cette information, les gradients de transformation moyens par élément  $F$  ont été évalués. La figure 1.11a montre l'évolution de la composante  $1 - F_{zz}$  en fonction du niveau de gris moyen. On observe une forte corrélation entre les deux grandeurs quel que soit le niveau considéré. Ceci est confirmé par le fait que les champs de déformation présentent la même hétérogénéité tout au long de l'essai. La figure 1.11b,c montre une coupe sagittale du champ de déformation  $\epsilon_{zz}^e = F_{zz} - 1$  pour les deux niveaux extrêmes de déformation.

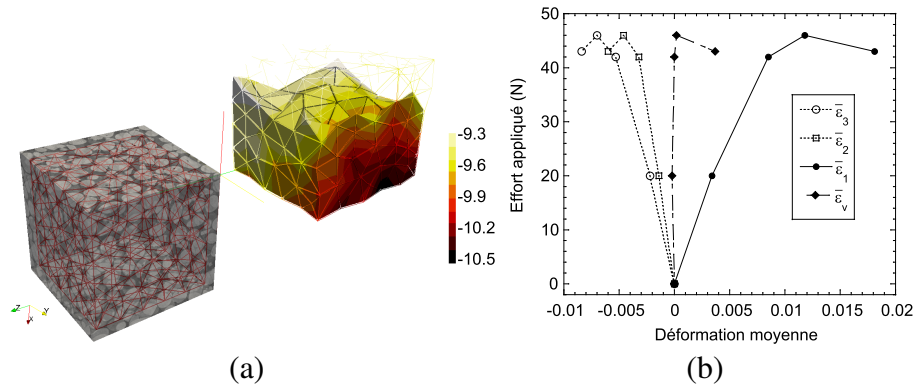


**Figure 1.11.** Analyse d'un essai de compression sur laine de roche. Moyenne de l'opposé des déformations longitudinales moyennes en fonction du niveau de gris pour les quatre niveaux considérés (a). Coupes sagittales du champ de déformation longitudinale pour les deux niveaux extrêmes (b,c).

**Analyse d'un essai de traction sur matériau énergétique.** Un essai de traction *in situ* sur une éprouvette en matériau énergétique (figure 1.12a) a été imagé au synchrotron de l'ESRF (Grenoble). La taille physique du voxel est de  $7.4 \mu\text{m}$ . Les champs volumiques de déplacement ont ainsi pu être mesurés pour quatre niveaux d'effort différents. A partir de cette information, les déformations principales moyennes ont été évaluées sur tout l'échantillon. La figure 1.12b montre l'évolution de ces trois grandeurs en fonction de l'effort appliqué. Jusqu'au pic, on observe une déformation volumique quasi nulle, suggérant que le comportement macroscopique est essentiellement dicté par la matrice polymère et non les grains. Une dilatance est observée en post-pic.

**Analyse d'une fissure de fatigue.** Une éprouvette en fonte à graphite sphéroïdal (section  $1.6 \text{ mm} \times 1.6 \text{ mm}$ ) a été prélevée par électroérosion dans une éprouvette plus grande (section  $6 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$ ) préfissurée en fatigue à rapport de charge  $R = 0.1$ , et à  $K_{\text{max}}$  constant de manière à limiter la taille de la zone plastique au voisinage de la pointe de fissure. Les essais dans un tomographe de laboratoire ont permis de suivre l'ouverture progressive de fissures sous un chargement monotone croissant [LIM09]. L'utilisation d'une mini-machine de traction a permis de réaliser le chargement *in situ* et d'acquérir des images 3D de la zone fissurée avec une taille de voxel de  $3.5 \mu\text{m}$ .

La figure 1.13 montre les champs de déplacement dans la direction de traction obtenus par corrélation volumique et par la simulation numérique effectuée avec le premier champ utilisé comme condition aux limites. On montre également les iso-0 des fonctions de niveaux obtenues à partir des résidus de corrélation. Enfin, on donne l'évolution des facteurs d'intensité des contraintes pour les trois modes le long du front



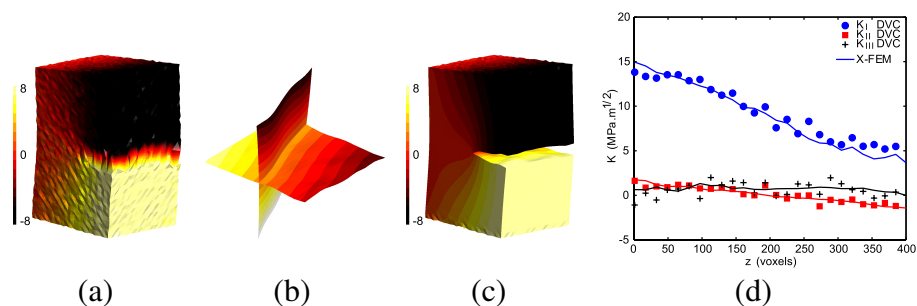
**Figure 1.12.** Analyse d'un essai de traction sur matériau énergétique. Maillage, microstructure et champ de déplacement longitudinal (en voxels) pour le premier effort appliqué (a). Evolutions des déformations principales et volumiques moyennes en fonction de l'effort appliqué (b).

de la fissure [HIL10]. On observe un excellent accord entre la mesure et la simulation numérique non seulement sur le mode I mais également pour les deux autres modes.

## 1.5. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Une formulation générale de la mesure de champs de déplacement a été discutée. Deux approches différentes ont été introduites. La première consiste à considérer des déplacements localement constants, voire lentement variables. Sur la base présentée, on peut également développer des techniques supposant le champ de déplacement continu (par exemple au sens des interpolations utilisées lors de calculs par éléments finis). On peut également exploiter des informations *a priori* sur le comportement du matériau lors de la phase de mesure proprement dite. On peut ainsi mesurer un champ de déplacement mécaniquement admissible (*e.g.* solution d'un problème d'élasticité particularisé ici à la mesure de facteurs d'intensité des contraintes).

La mesure de champs cinématique n'est pas nécessairement la seule faite lors d'un essai mécanique. Les déformations de films minces peuvent également être mesurées par diffraction des rayons X lors d'essais *in situ* [FAU09]. Elles sont en train d'être couplées à des mesures cinématiques par corrélation d'images. La thermographie infrarouge [GAU81] est un complément très intéressant, notamment pour permettre une analyse énergétique complète de l'essai [CHR00, CHR08, SCH08, BOD09, LAV09,



**Figure 1.13.** Analyse d'un essai de fatigue in situ dans un tomographe de laboratoire. Champ de déplacement vertical (exprimé en  $\mu\text{m}$ ) obtenu par corrélation de tomographies aux rayons X (a). Géométrie de fissure extraite des résidus de corrélation (b). Champ de déplacement vertical (exprimé en  $\mu\text{m}$ ) obtenu par simulation numérique à partir des conditions aux limites issues de la corrélation volumique (c). Comparaison des évolutions le long du front de la fissure des facteurs d'intensité des contraintes obtenus à partir des champs de déplacement mesurés (DVC) et calculés (X-FEM) (d).

NOG09, PON09, MAQ09, DOU10]. On peut également utiliser des informations microstructurales de surface obtenues par EBSD et la coupler à des mesures cinématiques [HER07, HER09]. La tomographie en contraste de diffraction en cours de développement [LUD08, JOH08] permet une visualisation en volume de microstructures. Ceci est un complément très intéressant par rapport aux mesures cinématiques volumiques. On notera également que la variété des mécanismes de dégradation dans les matériaux composites nécessite souvent une combinaison de techniques [LEV10] pour bien les caractériser. De manière générale, la multiplication des informations extraites d'un essai doit permettre de mieux le comprendre, de mieux l'analyser et l'exploiter.

La mesure de champs n'est généralement pas une fin en soi. Elle correspond à la première étape d'un processus d'identification voire de validation. Différentes approches sont actuellement développées, notamment dans le cadre du [GDR03]. Le développement de ces nouvelles techniques ne vient pas simplement améliorer la productivité ou l'efficacité du mécanicien devant sa machine d'essai. Il remet en cause la conception même des essais. En effet, l'homogénéité de l'essai ou sa simplicité n'est plus un impératif. En conséquence des essais hétérogènes peuvent être imaginés, non pour le plaisir d'une complication supplémentaire, mais par souci d'efficacité, de manière à pouvoir appréhender sur un seul essai le plus d'information utile sur le comportement du milieu. Ceci n'est pas une simple vue de l'esprit car une sollicitation hétérogène donne beaucoup plus d'information, et permet une formulation du

problème d'identification des paramètres constitutifs mieux conditionnée. Cela est à même de bouleverser complètement la stratégie de conception des essais mécaniques.

L'intégration de techniques d'analyse inverse ou de recalage par modélisation numérique venant directement interagir avec les mesures de champ vient compléter ce dispositif en permettant des aller et retours fructueux entre expérience et calcul, pour quoi pas, dans un futur proche, en temps réel. On peut alors rêver de la machine d'essai intelligente qui vienne appliquer la sollicitation utile pour acquérir l'information manquante dans le processus d'identification des propriétés recherchées.

## 1.6. Bibliographie

- [ADR05] R. J. Adrian, *Exp. Fluids* **39** (2005) 159-169.
- [ALL94] L. Allais *et al.*, *Acta Met. Mater.* **42** [11] (1994) 3865-3880.
- [AVR08] S. Avril *et al.*, *Exp. Mech.* **48** [4] (2008) 381-402.
- [BAR77] D. B. Barker & M. E. Fourny, *Optics Lett.* **1** (1977) 135-137.
- [BAY99] B. K. Bay *et al.*, *Exp. Mech.* **39** (1999) 217-226.
- [BEN09] A. Benoit *et al.*, *J. Biomech.* **42** (2009) 2381-2386.
- [BER91] Y. Berthaud, mémoire d'HDR, Université Paris 6 (1991).
- [BER95] Y. Berthaud *et al.*, eds., *Photomécanique 1995*, (GAMAC, 1995).
- [BER96] Y. Berthaud *et al.*, in : *C.R. Colloque National MECAMAT*, (1996), 77-80.
- [BES06] G. Besnard *et al.*, *Exp. Mech.* **46** (2006) 789-803.
- [BES07] G. Besnard *et al.*, in : *C.R. Europyro 2007*, (2007).
- [BES10] G. Besnard, thèse de doctorat, ENS de Cachan (2010).
- [BOD09] L. Bodelot *et al.*, *Mat. Sci. Eng.* **A501** [1-2] (2009) 52-60.
- [BLA99] T. Black & T. Belytschko, *Int. J. Num. Meth. Eng.* **45** (1999) 601-620.
- [BOR04] M. Bornert *et al.*, *Inst. Mes. Métrol.* **4** (2004) 43-88.
- [BOR09] M. Bornert *et al.*, *Exp. Mech.* **49** [3] (2009) 353-370.
- [BRE03] T. Bretheau *et al.*, *Rev. Met. Paris* **5** (2003) 567-575.
- [BRU01] M. Brunet & F. Morestin, *J. Mat. Proc. Tech.* **112** [2-3] (2001) 214-226.
- [BUR82] P. J. Burt *et al.*, in : *Proc. IEEE Conf. on Pattern Recognition and Image Processing*, (1982), 269-274.
- [CHA05] L. Chambon *et al.*, in : *Photomécanique 2004*, (GAMAC, 2004), 313-320.
- [CHA02] I. Chasiotis & W. G. Knauss, *Exp. Mech.* **42** (2002) 51-57.
- [CHO05a] S. W. Cho *et al.*, *Sens. Actuators A* **120** (2005) 163-171.
- [CHO05b] S. W. Cho *et al.*, *J. Micromech. Microeng.* **25** (2005) 728-735.
- [CHO07a] S. W. Cho & I. Chasiotis, *Exp. Mech.* **47** (2007) 37-49.
- [CHO07b] S. W. Cho *et al.*, *Fatigue & Fract. Eng. Mat. Struct.* **30** (2007) 21-31.
- [CHR00] A. Chrysochoos & H. Louche, *Int. J. Eng. Sci.* **38** (2000) 1759-1788.
- [CHR08] A. Chrysochoos *et al.*, *J. Strain Analysis* **43** [6] (2008) 411-422.
- [CHU85] T. C. Chu *et al.*, *Exp. Mech.* **3** [25] (1985) 232-244.
- [CLA02] D. Claire *et al.*, *C.R. Mécanique* **330** (2002) 729-734.
- [CLA04] D. Claire *et al.*, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **61** [2] (2004) 189-208.

- [CLE01] P. Clerc *et al.*, in : *Photomécanique 2001*, (GAMAC, 2001), 33-41.
- [COU04] T. Coudert & P. Vacher, in : *Photomécanique 2004*, (GAMAC, 2004), 201-208.
- [DOU10] C. Doudard, S. Calloch, F. Hild and S. Roux, Identification of heat source fields from infra-red thermography : Determination of self-heating in a dual-phase steel by using a dog bone sample, *Mech. Mat.* **42** [1] (2010) 55-62.
- [DUD77] T. D. Dudderar & P. G. Simpkins, *Nature* **270** (1977) 45-47.
- [FAU09] D. Faurie *et al.*, *J. Appl. Cryst.* **42** (2009) 1073-1084.
- [FAY07] X. Fayolle *et al.*, *Exp. Tech.* **31** [3] (2007) 57-63.
- [FAY08] X. Fayolle, mémoire de M2R, CNAM Paris, (2008).
- [FAY08] X. Fayolle *et al.*, *Méc. & Ind.* **9** [5] (2008) 447-457.
- [FET09] T. Fett, *Eng. Fract. Mech.* **76** (2009) 921-934.
- [FOR08] F. Forsberg *et al.*, *J. Struct. Biol.* **164** (2008) 255-262.
- [FRA07] C. Franck *et al.*, *Exp. Mech.* **47** (2007) 427-438.
- [GAR02] D. Garcia *et al.*, *J. Mat. Proc. Tech.* **125-126** (2002) 736-742.
- [GAU81] G. Gaussorgues, *La thermographie infrarouge*, (Techniques et documentation, Paris (France), 1981).
- [GDR03] GDR CNRS 2519 - Mesures de Champs et Identification en Mécanique des Solides (<http://www.ifma.fr/lami/gdr2519/>).
- [GRE10] M. Grédiac, in : *C.R. Colloque National MECAMAT*, (2010).
- [GRE11] M. Grédiac & F. Hild, eds., (Hermes, Paris (France), 2011).
- [GRO77] R. Grousseau & S. Mallick, *Appl. Optics* **16** (1977) 2334-2336.
- [GUI00] L. C. Gui & W. Merzkirch, *Exps. in Fluids* **28** (2000) 36-44.
- [HAM07] R. Hamam *et al.*, *Strain* **43** (2007) 181-192.
- [HER07] E. Héripré *et al.*, *Int. J. Plasticity* **23** [9] (2007) 1512-1539.
- [HER09] E. Héripré *et al.*, *Eur. J. Comput. Mech.* **18** [3-4] (2009) 333-351.
- [HIL99] F. Hild *et al.*, rapport interne, LMT-Cachan, **230** (1999).
- [HIL02] F. Hild *et al.*, *Appl. Optics* **IP 41** [32] (2002) 6815-6828.
- [HIL06a] F. Hild & S. Roux, *C.R. Mécanique* **334** (2006) 8-12.
- [HIL06b] F. Hild & S. Roux, *Strain* **42** (2006) 69-80.
- [HIL09] F. Hild *et al.*, *Acta Mat.* **57** (2009) 3310-3320.
- [HIL10] F. Hild *et al.*, in : *C.R. Colloque National MECAMAT*, (2010).
- [HOL98] G. Holst, *CCD Arrays, Cameras and Displays*, (SPIE Engineering Press, Washington DC (USA), 1998).
- [JES49] H. T. Jessop & F. C. Harris, *Photoelasticity : Principles and Methods*, (Dover, New York (USA), 1949).
- [JOH08] G. Johnson *et al.*, *J. Appl. Cryst.* **41** (2008) 310-318.
- [JON89] R. Jones & C. Wykes, *Holographic and Speckle Interferometry*, (Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1989).
- [LAV09] K. Lavernhe-Taillard *et al.*, in : *C.R. CFM 2009*, 2009.
- [LAG00] A. Lagarde, ed., *Advanced Optical Methods and Applications in Solid Mechanics*, (Kluwer, Dordrecht (the Netherlands), 2000), **82**.
- [LEC09] H. Leclerc *et al.*, in : *MIRAGE 2009*, A. Galalowicz & W. Philips, eds., (Springer-Verlag, Berlin (Germany), 2009), **LNCS 5496** 161-171.
- [LEN07] N. Lenoir *et al.*, *Strain* **43** (2007) 193-205.

- [LEV10] D. Lévêque *et al.*, in : *C.R. Colloque National MECAMAT*, (2010).
- [LIM09] N. Limodin *et al.*, *Acta Mat.* **57** [14] (2009) 4090-4101.
- [LIU07] L. Liu & E. Morgan, *J. Biomech.* **40** (2007) 3516-3520.
- [LUD08] W. Ludwig *et al.*, *J. Appl. Cryst.* **41** (2008) 302-309.
- [MAN66] P. Mannog, *Glastechnische Berichte* **39** (1966) 229-329.
- [McN87] S. R. McNeill *et al.*, *Eng. Fract. Mech.* **28** [1] (1987) 101-112.
- [MAQ09] F. Maquin & F. Pierron, *Mech. Mat.* **41** (2009) 928-942.
- [MES30] A. Mesnager, *C.R. Acad. Sci. Paris* **190** (1930) 1249.
- [MOE99] N. Moës *et al.*, *Int. J. Num. Meth. Eng.* **46** [1] (1999) 133-150.
- [MOR10] F. Morestin *et al.*, in : *C.R. Colloque National MECAMAT*, (2010).
- [NOG09] R. Nogueira de Codes *et al.*, in : *C.R. CFM 2009*, (2009).
- [ORT02] J.-J. Orteu, in : *Techniques de l'Ingénieur* (2002), **Traité Génie Mécanique - Travail des matériaux** BM 7015.
- [ORT07] J.-J. Orteu *et al.*, *Strain* **43** [2] (2007) 96-108.
- [PAR74] D. M. Parks, *Int. J. Fract.* **10** [4] (1974) 487-502.
- [PON09] M. Poncelet *et al.*, *Strain* **46** (2010) 101-116.
- [POS65] D. Post, *Exp. Mech.* **5** (1965) 368-377.
- [RAN09] J. Rannou *et al.*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **199** (2010) 1307-1325.
- [RAS00] P. K. Rastogi, ed., *Photomechanics*, (Springer, Berlin (Germany), 2000), **77**.
- [RET05] J. Réthoré *et al.*, *Int. J. Fract.* **132** (2005) 65-79.
- [RET07a] J. Réthoré *et al.*, *C.R. Mécanique* **335** (2007) 131-137.
- [RET07b] J. Réthoré *et al.*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **196** [49-52] (2007) 5016-5030.
- [RET08a] J. Réthoré *et al.*, *Int. J. Num. Meth. Eng.* **73** [2] (2008) 248-272.
- [RET08b] J. Réthoré *et al.*, *C.R. Mécanique* **336** (2008) 643-649.
- [RET08c] J. Réthoré *et al.*, *Eng. Fract. Mech.* **75** [13] (2008) 3763-3781.
- [RET09] J. Réthoré *et al.*, *Eur. J. Comput. Mech.* **18** (2009) 285-306.
- [ROU02] S. Roux *et al.*, *Appl. Optics* **41** [1] (2002) 108-115.
- [ROU06] S. Roux & F. Hild, *Int. J. Fract.* **140** [1-4] (2006) 141-157.
- [ROU08] S. Roux *et al.*, *Comp. Part A* **39** [8] (2008) 1253-1265.
- [ROU09] S. Roux *et al.*, *J. Phys. D : Appl. Phys.* **42** (2009) 214004.
- [SCH08] P. Schlosser *et al.*, *Adv. Sci. Tech.* **59** (2008) 140-149.
- [SIM99] E. P. Simoncelli, in : *Handbook of Computer Vision and Applications*, B. Jähne, H. Haussecker & P. Geissler, eds., (Academic Press, 1999), **2** 297-422.
- [SMI94] P. Smigielski, *Holographie industrielle*, (Teknea, Toulouse, 1994).
- [SMI02] T. S. Smith *et al.*, *Exp. Mech.* **42** [3] (2002) 272-278.
- [SUO92] X. Suo & A. Combescure, *Nucl. Eng. Design* **135** (1992) 207-224.
- [SUT83] M. A. Sutton *et al.*, *Im. Vis. Comp.* **1** [3] (1983) 133-139.
- [SUT07a] M. A. Sutton *et al.*, *Exp. Mech.* **47** [6] (2007) 775-787.
- [SUT07b] M. A. Sutton *et al.*, *Exp. Mech.* **47** [6] (2007) 789-804.
- [SUT09] M. A. Sutton *et al.*, *Image correlation for shape, motion and deformation measurements*, (Springer, 2009).
- [VER04] E. Verhulp *et al.*, *J. Biomech.* **37** [9] (2004) 1313-1320.
- [WAG02] B. Wagne *et al.*, *Eur. Phys. J. AP* **17** (2002) 247-252.

- [WEL48] R. Weller & B. M. Shepard, in : *Proc. Soc. Exp. Stress Analysis*, (1948), 35-38.  
[WES39] H. M. Westergaard, *J. Appl. Mech.* **6** (1939) A49-A53.  
[XU08] Z.-H. Xu *et al.*, *J. Strain Analysis* **43** (2008) 729-743.