

Approche par calculs fractionnaires du fluage viscoélastique non linéaire du bois de Sapelli (*Entandrophragma cylindricum*)

NGUEDJIO Loïc Chrislin¹, NGAMGA MABEKOU Sandrine¹, MOUTOU PITTI Rostand^{2, 3},
TALLA Pierre Kisito¹

¹Unité de Recherche de Mécanique et de Modélisation des Systèmes des Physiques (UR2MSP) ; Département de Physiques, Faculté des Sciences, Université de Dschang, BP 67, Dschang, Cameroun

²Université Clermont Auvergne, Clermont Auvergne INP, CNRS, Institut Pascal, F-63000, Clermont-Ferrand, France

³CENAREST, IRT, BP14070, Libreville, Gabon

lchristlin2000@gmail.com, tpierrekisito@yahoo.com, rostand.moutou_pitti@uca.fr

Mots clefs : Bois ; fluage ; Sapelli ; modèle fractionnaire de Thomson.

Contexte et objectifs

Le bois apparaît aujourd'hui comme un nouveau matériau de construction moderne et s'impose davantage en structure notamment à cause de son caractère renouvelable, de sa durabilité et de sa mise en forme aisée. Cependant, une fois en service il flue à température ambiante et sous de faibles contraintes, se déforme et fait ainsi face au problème de fluage. Il est donc impératif de contrôler et de développer des solutions adéquates telles que la modélisation et la prédiction adressées à ce phénomène qui peut devenir nocif. Les modèles rhéologiques classiques de prédiction du fluage ont fait l'objet de plusieurs travaux qui pour certains requièrent un grand nombre de paramètres (Tagne 2018). Dans l'optique de concevoir des modèles de prédiction ayant un nombre réduit de paramètres et qui par la même occasion représentent mieux le caractère héréditaire du bois (car la déformation observée à un instant donné dépend des déformations observées aux instants précédents), les modèles rhéologiques fractionnaires ont vus le jour (Krasnobrizha 2016). L'objectif de ce travail est de modéliser et de prédire les déformations du bois de Sapelli (*Entandrophragma cylindricum*) utilisé en structure. Pour ce fait le modèle fractionnaire de Thomson est proposé.

Matériels et méthodes

Modèle rhéologique fractionnaire de Thomson

La Fig. 1 nous présente le modèle rhéologique fractionnaire de Thomson à trois paramètres, proposé pour cette étude. L'équation différentielle fractionnaire (Xu, 2019) de ce modèle se présente sous la forme suivante :

$$E_0 D^\alpha \varepsilon(t) + a\varepsilon(t) = b D^\alpha \sigma(t) + c\sigma(t) \quad (1)$$

avec : $a = \frac{E_0 + E_1}{\nu}$, $b = \frac{E_0 E_1}{\nu}$ et $c = \frac{E_1}{\nu(E_0 + E_1)}$.

E_0 et E_1 sont les modules d'élasticité des deux ressorts du modèle et caractérisent le comportement élastique du matériau, ν est le coefficient de viscosité fractionnaire, D^α est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (Bekka 2018) et α l'ordre de cette dérivée. $\varepsilon(t)$ et $\sigma(t)$ représentent respectivement la déformation totale et la contrainte totale.

La fonction de fluage $\varepsilon(t)$ du modèle est obtenue en résolvant au moyen de la Transformée de Laplace (Krasnobrizha 2016) l'équation différentielle (1) d'inconnue $\varepsilon(t)$ pour σ constante. La solution est sous la forme suivante :

$$\varepsilon(t) = \sigma \cdot b \cdot E_{\alpha,1}(-at^\alpha) + \sigma \cdot c \cdot t^\alpha \cdot E_{\alpha,\alpha+1}(-at^\alpha) \quad (2)$$

où $E_{\alpha,\beta}$ est la fonction généralisée de Mittag-Leffler (Bekka, 2018).

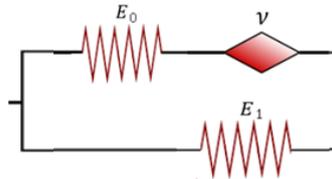


Fig. 1 : Modèle rhéologique fractionnaire de Thomson à trois paramètres.

Méthode expérimentale et méthode numérique

Pour tester la fiabilité du modèle, nous avons effectué des essais de fluage en flexion statique quatre points sur 2 éprouvettes à section carrée de dimensions (20mm \times 20mm \times 360mm) d'un même tronc de Sapelli (*Entandrophragma cylindricum*) Dans un environnement aux conditions climatiques de 24°C de température et de 65% de taux d'humidité relatif, cet essai consiste à exercer une contrainte sur une éprouvette, la maintenir constante et mesurer les déformations dans le temps (Fig. 2). Nous obtenons ainsi un ensemble de points expérimentaux représentant les données du fluage de notre matériau (Fig. 3).



Fig.2 : Photo de l'éprouvette chargée en flexion quatre points.

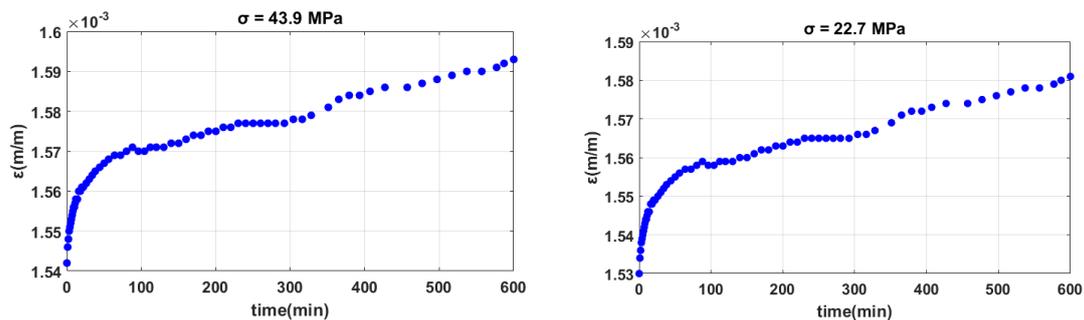


Fig. 3 : Courbes expérimentales du fluage : éprouvettes 1 et 2.

Une fois les données expérimentales à notre disposition, il faut trouver les paramètres optimaux du modèle qui ajustent ces données. Le premier paramètre E_0 est calculé en utilisant la valeur de la déformation initiale instantanée ε_0 relevée lors de l'essai de fluage juste au moment où le matériau est chargé. L'expression de ce paramètre est donnée par :

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (3)$$

Les autres paramètres E_1 , α et ν sont déterminés en utilisant l'algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt basé sur le *machine learning*.

Résultats et discussion

En introduisant l'équation (2) donnant la fonction de prédiction du fluage du modèle fractionnaire de Thomson dans l'algorithme, les paramètres optimaux du modèle sont déterminés en ajustant les données expérimentales du fluage. La précision des résultats est également calculée par l'algorithme et la courbe d'ajustement est superposée à celle du fluage expérimental comme le montre la Fig. 2.

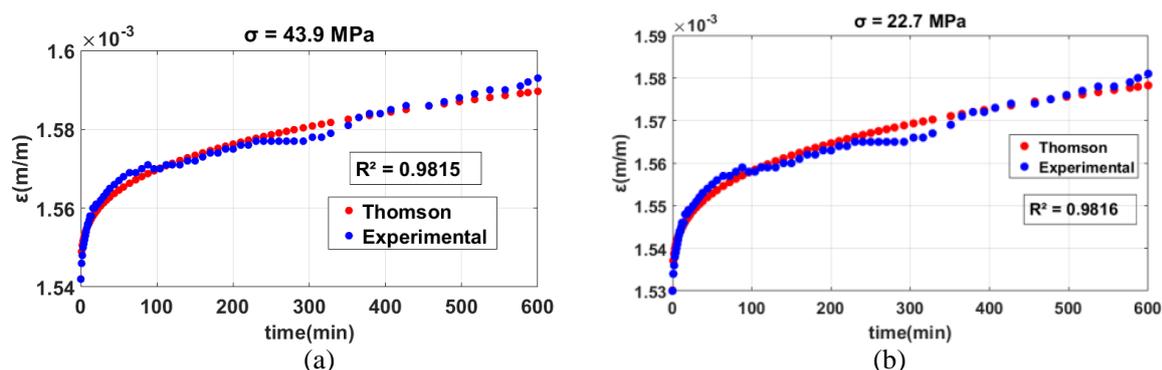


Fig.2 : Prédiction du fluage via le modèle fractionnaire de Thomson : éprouvettes 1 et 2.

En observant les ajustements avec le modèle fractionnaire de Thomson (Fig.2), on se rend compte que la déformation quasi-instantanée ainsi que le fluage primaire sont bien représentés. Le fluage secondaire, quant à lui, présente quelques différences d'adaptation qui peuvent être causées par les fluctuations des conditions environnementales pendant les essais. De façon générale, nous pouvons constater que le modèle fractionnaire de Thomson s'accorde bien avec l'expérimental pour un coefficient de détermination des paramètres de 0,98.

Par ailleurs, les valeurs des paramètres optimaux déterminés par l'algorithme sont présentées dans le Tab. 1 où on peut remarquer que le Sapelli est un bois souple car les déformations croissent avec la contrainte. De plus en diminuant la contrainte, on augmente l'ordre fractionnaire α , augmentant implicitement la viscosité ce qui réduit les glissements aux joints au sein du matériau et dans ce cas les déformations sont moins prononcées.

Tab.1 : Paramètres du modèle fractionnaire de Thomson.

σ (MPa)	E_0 (10^4 MPa)	E_1 (MPa)	ν (10^{19} MPa.min $^\alpha$)	α
43,9	2,85	0,054	0,90	0,302
22,7	1,48	0,015	1,1	0,303

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, l'étude du comportement différé (fluage non linéaire) du bois de Sapelli (*Entandrophragma cylindricum*) a été abordée en utilisant une approche basée sur la théorie du calcul fractionnaire. Il ressort de cette étude que le modèle fractionnaire de Thomson à trois paramètres proposé ajuste le fluage du Sapelli avec une précision moyenne de 98%. Les paramètres optimaux du modèle ont été déterminés grâce à l'algorithme de Levenberg-Marquardt et les résultats ont été validés par les essais expérimentaux montrant que le modèle fractionnaire décrit bien les deux premiers stades du fluage non linéaire du bois de Sapelli. Le modèle fractionnaire de Thomson à trois paramètres peut donc être utilisé en ingénierie comme modèle de prédiction des déformations de ce bois. En guise de perspectives pour ces travaux,

les recherches futures se pencheront sur l'étude du fluage à des niveaux de contraintes plus élevés et prenant en compte les fluctuations des conditions environnementales. Les essais devront être menés sur une période plus grande afin d'étudier la phase tertiaire du fluage et de modéliser le comportement au point de rupture.

Remerciements

Les auteurs remercient l'Unité de Recherche et de Modélisation des Systèmes Physiques de l'Université de Dschang pour avoir fourni les installations de flexion.

Références

- Bekka A (2018) Calcul numérique des dérivées fractionnaires, mémoire de master en mathématiques de l'université Mohamed Boudiaf De M'sila, République Algérienne Démocratique et Populaire, 33p.
- Krasnobrizha A, Rozycki P, Cosson P, Gornet L (2016) Modélisation des mécanismes d'hystérésis des composites tissés à l'aide d'un modèle collaboratif élasto-plastique endommageable à dérivées fractionnaires, *Matériaux et Techniques*, 104(4), EDP Sciences, p. 407.
- Xu Y, Cheng M, Huang R, Yu, J (2019) The general kelvin model and poynting model based on the general fractional calculus, In: *IOP Conference Series earth and Environmental Science*, volume 252, 9p.
- Tagne NS, Ndapeu D, Nkemaja D, Tchemou G, Fokwa D, Huisken W (2018) Sudy of the viscoelastic behaviour of the Raffia vinifera fibres, *Industrial Crops and Products*, 124, p. 572–581.